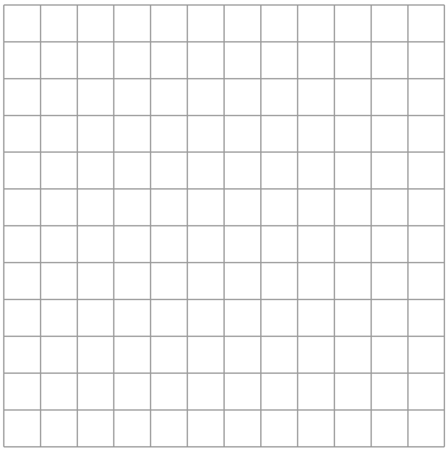
1.7 Indépendance linéaire

Définition 17 (famille linéairement(in-)dépendante)**.**
Une famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ de $\mathbb{R}^n$ est *linéairement indépendante* ou *libre* si l'unique solution de

$$x_1\vec{v_1} + \cdots + x_p\vec{v_p} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$$

est le vecteur nul $\vec{0} \in \mathbb{R}^p$. Sinon on dit que la famille est *linéairement dépendante* ou *liée*.

Exemple



Cas particuliers

1) $(\vec{v}) \in \mathbb{R}^n$ est une famille linéairement indépendante si et seulement si

$$x\vec{v} = \vec{0}$$

n'admet que la solution triviale $x = 0$. Ceci est équivalent à

2) Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

3) $(\vec{v_1}, \vec{v_2}) \in \mathbb{R}^n$ est linéairement dépendante si et seulement si

$$x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} = \vec{0}$$

admet une solution non triviale.

Définition 18 (vecteurs colinéaires)**.**
Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$. Ils sont dits *colinéaires* s'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v_1} = \mu\vec{v_2}$.

On a le résultat suivant :

Etude de la dépendance linéaire d'une famille de vecteurs

Méthode 1

Soit $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ de $\mathbb{R}^n$ une famille de vecteurs. On peut l'écrire sous la forme d'une matrice A de taille $n \times p$

Alors la famille est linéairement indépendante si et seulement si $A\vec{x} = \vec{0}$ admet uniquement la solution triviale.

Théorème 7. *Les colonnes d'une matrice sont linéairement indépendantes si et seulement si l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale.*

Preuve

Exemple

Méthode 2

Exemple

Théorème 8. *Une famille de vecteurs* $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *avec* $p \geq 2$ *est linéairement dépendante si et seulement si au moins l'un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs restants.*

Preuve

Exemple

Théorème 9. *Toute famille* $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *est linéairement dépendante si* $p > n$.

Bases de $\mathbb{R}^n$

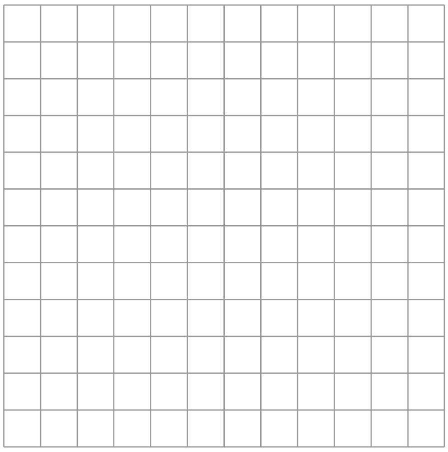
Définition 19 (base de $\mathbb{R}^n$)**.**
Une famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ de $\mathbb{R}^n$ est une *base* de $\mathbb{R}^n$ si

Remarques

1) On dit aussi que la famille $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ de $\mathbb{R}^n$ engendre $\mathbb{R}^n$, ou que $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ est un système de générateurs de $\mathbb{R}^n$.

2) Lien entre p et n :

Exemple : Base canonique de $\mathbb{R}^2$



Remarque